



Ответы и решения задач «белого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (6 баллов) Дима и Лёша участвовали в соревнованиях по бегу. Дима прибежал четвёртым, между Димой и Лёшей прибежало ещё 2 человека. Перед Лёшей и после него финишировало одинаковое количество участников, а трое сошли с дистанции. Сколько человек стартовало на дистанции?

Ответ: 16.

Решение: Если Дима прибежал четвёртым, а между ним и Лёшей ещё двое, то всего перед Лёшей финишировало 6 человек, как и после него. В сумме это 12, плюс сам Лёша, плюс трое сошедших по ходу дистанции. Всего получается 16 человек.

Задача 2. (7 баллов) У доярки есть два пустых ведра ёмкостью 5 и 9 литров и ведро ёмкостью 14 литров, полное молока. Сколько операций по переливанию молока из одного ведра в другое ей нужно совершить, чтобы получить два ведра, в каждом из которых по 7 литров молока? Доярке необходимо использовать как можно меньше переливаний, чтобы случайно не разлить молоко.

Ответ: 13.

Решение: Обозначим количества молока в ведрах (5, 9, 14 литров объёмом) тройками чисел. Изначальное состояние – заполнено только ведро в 14 литров, получим тройку (0, 0, 14). Совершая переливания, получаем тройки: (0, 9, 5), (5, 4, 5), (0, 4, 10), (4, 0, 10), (4, 9, 1), (5, 8, 1), (0, 8, 6), (5, 3, 6), (0, 3, 11), (3, 0, 11), (3, 9, 2), (5, 7, 2), (0, 7, 7). Итого получим 13 переливаний.

Задача 3. (8 баллов) Серёжа решил измерить расстояние от своего стола до кровати. У него не было рулетки, но были палочки известных длин: жёлтые палочки длиной 1 см, красные – по 5 см, синие – по 10 см. Серёжа выложил несколько палочек вдоль стены по прямой от стола до кровати (он использовал палочки всех трёх цветов). Об использованных палочках известно, что красных и синих палочек вместе столько же, сколько жёлтых, красных палочек больше, чем синих, а общее количество палочек меньше 14. Чему равно измеряемое расстояние, если все количества палочек – чётные числа?

Ответ: 46 см.

Решение: Если общее количество палочек < 14 , а красных и синих столько, сколько жёлтых, то количество жёлтых < 7 . Если все количества палочек – чётные числа, то жёлтых палочек может быть 6 или 4 (2 не может быть, потому что красных и синих не может быть по 1 штуке). Если жёлтых 6, то красных – 4, а синих – 2 (так как красных больше, чем синих). Если жёлтых 4, то красных и синих должно быть по 2, но их количество не равно, поэтому такой вариант не удовлетворяет условиям. Итого жёлтых 6, красных 4, синих – 2 штуки. Тогда расстояние, которое измерил ими Серёжа, будет равно $6 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 46$ см.

Задача 4. (9 баллов) В прямоугольнике ABCD (См. рис. 1) точка E делит сторону BC пополам, а AE перпендикулярна DE. Какова площадь прямоугольника, если его периметр – 24?

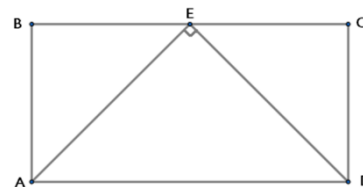


Рисунок 1

Ответ: 32.

Решение: Прямоугольные треугольники ABE и CDE равны (по двум катетам), тогда углы BEA и CED равны. Угол BEC развёрнутый, то есть равен 180° , т.к. угол AED по условию равен 90° , то на углы BEA и CED приходится тоже 90° . Из их равенства следует, что каждый из этих углов равен 45° . Тогда в треугольнике ABE угол BAE тоже равен 45° (сумма углов треугольника равна 180°), то есть получаем, что треугольник ABE равнобедренный, то есть $AB = BE$. Отсюда и из $BE = CE$ (по условию), получим, что $BC = 2 \cdot AB$, тогда $P = AB + BC + CD + AD = 6 \cdot AB = 24$. $AB = 4$, а $BC = AD = 8$. Площадь $S = AB \cdot AD = 4 \cdot 8 = 32$.

Задача 5. (10 баллов) Сколькими способами можно разрезать равносторонний треугольник со стороной 4 на фигуры, изображённые на рисунке? (См. рис. 2) Каждый раз вырезается равносторонний треугольник, со стороной, на 1 меньшей, чем сторона предыдущего треугольника. Способы, отличающиеся поворотами, включаются в подсчёт.

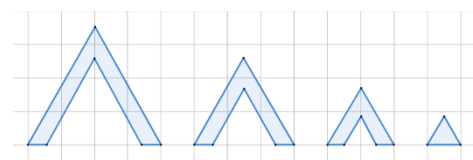


Рисунок 2

Ответ: 27.

Решение: Из равностороннего треугольника со стороной 4 можно вырезать равносторонний треугольник со стороной 3 тремя способами (на каждой из сторон), аналогично каждый меньший треугольник тоже можно вырезать тремя способами. Итого вырезаем три фигуры, каждую можно вырезать тремя способами, получаем $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ способ.

Задача 6. (10 баллов) Из книги выпала пачка страниц (последовательных, без пропусков), номер первой страницы – 271, а номер последней состоит из тех же цифр, но в другом порядке. Сколько страниц в выпавшей пачке?

Ответ: 442.

Решение: Номер последней страницы должен иметь другую чётность (лист состоит из двух страниц, чётной и нечётной), поэтому, переставляя цифры 2, 7 и 1, мы можем получить только два чётных числа, 172 и 712, первое не подходит, потому что номер последней страницы должен быть больше первой, остаётся 712. Тогда количество страниц – $712 - 271 = 441$, плюс 1, так как мы включаем в подсчёт обе крайние страницы, итого 442.

Задача 7. (12 баллов) Оля играет в математическую игру с Леной. Лена загадала арифметическое выражение, состоящее из пяти символов (цифр и операторов), символы могут повторяться. Значение выражения равно 28. Оля придумывает комбинацию, а Лена помечает тёмно-серым те символы, которые в ответе стоят на нужных местах, а светло-серым – те, которые есть в её ответе, но стоят на других местах. После двух попыток Оля получила вот такие комментарии:

9	*	3	+	1
7	6	-	4	8

Рисунок 3

$9 \cdot 3 + 1$ (1,+ светло-серые)

$76 - 48$ (8 тёмно-серая) или (См. рис. 3) Какое выражение загадала Лена?

Ответ: $10 + 18$.

Решение: Судя по цифрам и знакам арифметических операций, использованных Олей, в верной комбинации нет *, -, 3, 4, 6, 7, 9, то есть остаются +, /, 0, 1, 2, 5, 8. Если 8 стоит на последнем месте, а + не на предпоследнем, то на предпоследнем месте возможен либо знак /, либо цифра. Если там знак деления, то в трёх оставшихся ячейках нужно уместить + и какую-то комбинацию, которая образует $28 \cdot 8 = 224$, что невозможно. Получим, что в выражении будет присутствовать из знаков арифметических операций только +. Если он на втором месте, то для того, чтобы сумма была равна 28, мы должны написать на первом и на третьем местах нули, а на четвертом - двойку: $0 + 028$, но такой вариант невозможен, так как двойки в символах нет. Остаётся ситуация $_ _ + _ 8$. На четвертом месте не может быть 0, значит остаётся 1. Тогда первые два места займут 1 и 0. Получим в итоге $10 + 18$.

Задача 8. (12 баллов) В коридоре расположены 24 двери подряд, все они закрыты и пронумерованы от 1 до 24 по порядку. Администратор проходит и открывает все двери, которые имеют номер, кратный единице, потом проходит обратно и меняет состояние (открывает закрытые и закрывает открытые) тех дверей, номера на которых кратны двум, потом он проходит опять и меняет состояние дверей, чьи номера кратны трём и так далее до 24. Сколько дверей будут открыты после двадцати проходов?

Ответ: 8.

Решение: Из условия задачи следует, что состояние каждой двери меняется сколько раз, сколько у номера двери делителей (включая единицу и само число). Поскольку у нас 20 проходов, то все двери от 1 до 20 удовлетворяют следующему рассуждению: все делители попарны, то есть состояния дверей будут меняться чётное количество раз, то есть они будут закрыты. Исключениями будут ситуации, когда пара делителей одинакова, то есть номер двери является полным квадратом натурального числа. Тогда будут открыты двери 1, 4, 9, 16. Двери 21, 22, 23, 24 будут открыты по той причине, что не будет 21-24 проходов. Тогда ответ 8.

Задача 9. (12 баллов) Две белки решили переехать в новое дупло, которое находится в 540 метрах от старого. Теперь каждой из них нужно перенести с собой в новое дупло по 900 орехов, накопленных на зиму. Белки находятся в старом дупле. Белка-папа может перенести до 36 орехов, а белка-мама – до 24 орехов. Но белка-папа передвигается со скоростью 60 метров в минуту, а белка-мама – 90 метров в минуту. Белки с орехами и без них передвигаются с одинаковой скоростью. Какая из белок перенесёт свою долю орехов быстрее и на сколько минут, если обе они стараются закончить переезд как можно скорее?

Ответ: белка-папа, на 9 минут.

Решение: Белка-папа может перенести до 36 орехов, значит, он будет переносить по 36 орехов, пока сможет. $900/36=25$, то есть ему нужно будет совершить 25 походов из старого дупла в новое. Но ему ещё нужно 24 раза вернуться из нового дупла в старое. Чтобы пересечь расстояние от одного дупла до другого белке-папе потребуется $540/60=9$ минут. Тогда общее им затраченное время - $25*9+24*9=441$ минута.

Проводя те же вычисления для белки-мамы получим, что ей нужно совершить $900/25=37.5$, то есть 38 походов из старого дупла в новое и 37 в обратном направлении. На каждый поход она потратит $540/90=6$ минут, а общее затраченное время составит $38*6+37*6=450$ минут.

Таким образом, белка-папа оказался быстрее на $450-441=9$ минут.

Задача 10. (14 баллов) На планете Керби сутки делятся на 36 керби-часов, керби-час длится 90 керби-минут, а керби-минута длится 75 земных секунд. Если на планете Керби пройдёт 16 керби-суток, то сколько суток пройдёт на Земле?

Ответ: 45.

Решение: Керби-минута длится 75 земных секунд, то есть керби-минута = $75/60=1.25$ земных минут.
Керби-час = 90 керби-минут = $90*1.25 = 112.5$ земных минут = 1.875 (112.5/60) земных часов.
Керби-сутки = 36 керби-часов = $36*1.875 = 67.5$ земных часов = 2.8125 (67.5/24) земных суток.
Тогда 16 керби-суток = $2.8125*16 = 45$ земных суток.